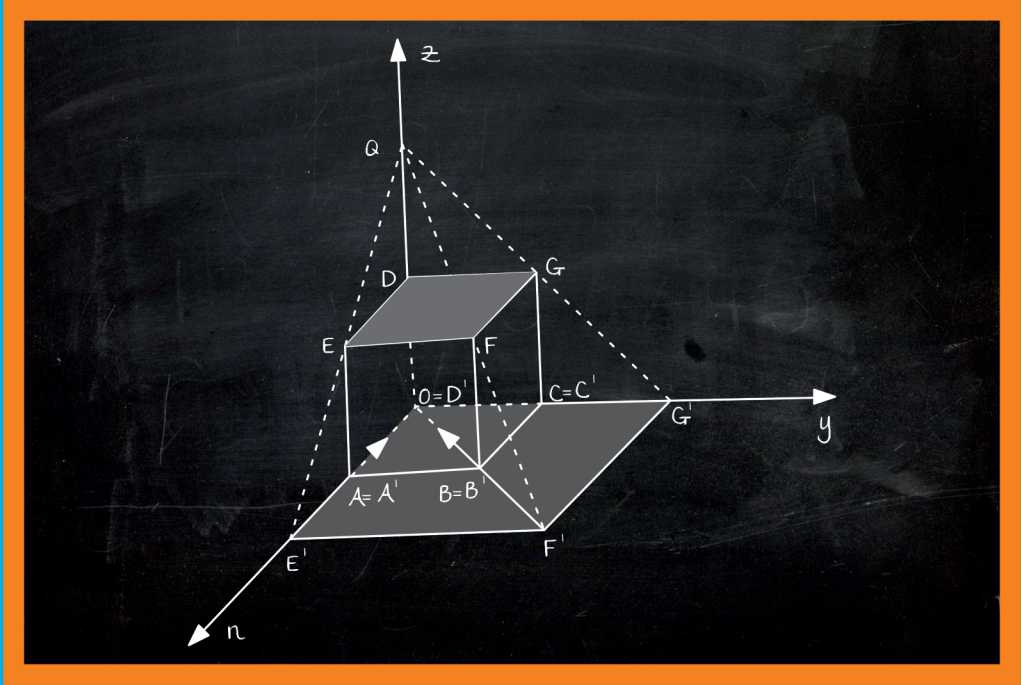


DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİLER



Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Prof. Dr. Ziya ARGÜN

DÖNÜŞÜMLER ve GEOMETRİLER

Hasan Hüseyin UĞURLU Ziya ARGÜN

©Bütün hakları saklıdır. Yazarların yazılı izni olmaksızın bu kitabın bir kısmı ya da tamamı çoğaltılamaz ve kullanılamaz.

Bu eser

*Hasan Hüseyin UĞURLU ile Ziya ARGÜN' ün
geçmişlerinin hatıralarına ithaf edilmiştir.*

Önsöz

Öklidyen, afin ve projektif dönüşümler ile bunların geometrilerini inceleyen bu kitap; Fen Fakültelerinin Matematik Bölümleri ile Eğitim Fakültelerinin Anabilim Dallarında okuyan öğrenciler için tasarlanmıştır. Bunun yanında, Fen bilimleri ve Mühendislik alanlarında okuyan öğrencilere de yararlı uygulamaları olacağı düşünülmektedir.

Eşlik ve benzerliğin geometrinin yapı taşlarından olan iki kavram olduğunu biliyoruz. Bu, iki eş şekil verildiğinde bunlar arasında uzaklığı koruyan bir eşlik dönüşümünün (izometri) var olması demektir. Şekiller benzer olduğunda, noktalar arasındaki uzaklıkların oranını sabit bırakan bir benzerlik dönüşümü vardır. Bu dönüşümleri kapsayan ve paralelliği koruyan dönüşümler afin dönüşümler olarak bilinmektedir. İki geometrik şekil arasında böyle bir dönüşüm varsa, bu şekiller de afin anlamda eştirler. Öklidyen ve afin dönüşümleri kapsayan ve uygulama alanı oldukça geniş olan projektif dönüşümler, doğrudan farklı dört noktanın çapraz oranını koruyan dönüşümlerdir. İki şekil arasında bu türden bir dönüşüm tanımlı ise bu şekiller de projektif anlamda eştirler. Dönüşümler arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılması için izdüşüm dönüşümleri ve daha geneli olan projektif dönüşümler de detaylı bir şekilde incelenmiştir. Afin ve projektif dönüşümler uygulama alanı geniş olan önemli geometrik kavramlardır.

Öklidyen, afin ve projektif dönüşümlerin cebirsel ve matris formları arasında sıkı bir ilişki vardır. Özellikle, bu ilişkinin ve Öklidyen dönüşümlerin anlaşılması, öğrencilerin diğer dönüşümleri öğrenmeleri açısından önemlidir. Bir dönüşümü anlamak için, bu ilişkinin ve her bir dönüşüm altında değişmez kalan noktaların (veya nokta kümesi) iyi bilinmesi gerekir. Ayrıca, her bölümün sonuna yeteri kadar çözümlü problemler ilave edilerek dönüşümlerin yapısı ve özellikleri somutlaştırılmaya çalışılmıştır.

Projektif uzayın kitaba dahil edilmesinin nedeni, bu uzayın dönüşümlerinin teknolojiye uygulamalarının özellikle; bilgisayar grafikleri, şifreleme, mekanizma, moleküler modelleme, hareket analizi, robotik, bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAD) mimari, inşaat mühendisliği resim ve genel olarak sanatta oldukça geniş olmasıdır. Perspektif izdüşümü, uzaydaki bir nesnenin resmini bir düzleme izdüşürür. Örneğin, fotoğraf çekme, perspektif merkezi adı verilen bir noktadan bakarak bir cismin noktalarını bir düzleme izdüşürmek demektir ve benzer biçimde, paralel izdüşüm dönüşümleri de mimarlık, resim, inşaat ve tasarım mühendisliğinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Öklidyen dönüşümler ile izdüşüm dönüşümleri, önemlerine binaen, ilk ve ortaöğretim matematik ders programlarında her zaman yer almaktadır. Fakat Fen Fakültelerinin Matematik Bölümleri ile Eğitim Fakültelerinin Matematik Eğitimi Anabilim Dallarının çoğunda bu içerikte bir ders yer almamakta ve öğretmenlerin vakıf olmadıkları dönüşümleri öğrencilerine öğretmeleri istenmektedir. Bu çelişkidendir dolayı, öğrencilerin dönüşümleri öğrenmeleri mümkün olamamaktadır. Bu nedenle kitap, öğretmen adayları, öğretmenler ve bu alanda araştırma yapacak bilim insanları, lisans eğitiminde böyle bir ders almamış olsalar da, kendi kendilerine anlayabilecekleri biçimde hazırlanmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda okuyucuya, çözümlü problemleri detaylıca incelemeleri ve bırakılan problemleri çözmeleri tavsiye edilmektedir.

Yazarlar, kitabın içeriğinin çerçevesini çizdikten sonra kaynak incelemesine girdiklerinde; güvenilir, anlaşılabilir, yukarıdaki okuyucu kitlesinin seviyesine uygun, pedagojik ve kendi içinde bütünlük sağlayan nadir eserlerden birinin David Gans'ın "Transformations and Geometries" [13] adlı eseri olduğunu gördüler. Bu nedenle, David Gans'ın eseri, bu kitap için temel kaynaklardan biri olmuştur. Bu eser, dönüşümleri hem sentetik hem de cebirsel olarak ele aldığından, bu kitapta da dönüşümler sentetik ve cebirsel olarak incelenmiş, matris formları ile zenginleştirilmiştir. Projektif geometri ile ilgili diğer önemli bir kaynak, Jurgen Richter-Gebert' in "Perspectives On Projective Geometry" adlı kitabıdır. Projektif uzayın geometrisi verilirken bu kitap esas alınmıştır. Dönüşümlerin kolay anlaşılması için, matris formları gerek metin içerisinde ve gerekse çözümlü problemlerde çok sık kullanılmıştır.

Bölüm 1 de temel kavramlardan bahsedilmiş, Bölüm 2 de; hareketler veya izometrilere adı verilen öteleme, dönme, yansıma dönüşümleri ile bunların bileşkeleri olan dönüşümler ve bu tür dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir. Bu tür dönüşümler üzerine kurulan benzerlik dönüşümleri ve bunların özellikleri de üçüncü bölümde tanıtılmaktadır.

Bölüm 4; hareketler ile benzerlik dönüşümlerini kapsayan afin dönüşümleri ve bu dönüşümlerin sınıfının özelliklerinin incelenmesine ayrılmıştır.

Projektif düzlem, projektif uzay ve bunların dönüşümlerine hazırlık yapmada gerekli olan izdüşüm dönüşümleri ve bu dönüşümlerin özellikleri de Bölüm 5 de incelenmiştir. Bu bölümde; paralel izdüşüm ve perspektif izdüşümün incelenmesinin yanı sıra, bu dönüşümler ile afin dönüşümler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Bölüm 6 da projektif dönüşümün tanımı, bu dönüşümlerin denklemleri ve özellikleri incelenmiştir. Öklidyen düzlemin projektif geometrisi bölüm sonunda incelenmiştir.

Bölüm 7; projektif düzlem ve temel kavramları ile bu düzlemin dönüşümlerini kapsamaktadır. Bu dönüşümler altında değişmez kalan özellikler tekrar incelenmiştir. Bu bölüm sonunda, paralel ve perspektif izdüşüm dönüşümlerinin anlaşılmasını kolaylaştıran matris formları ve uygulamaları bulunmaktadır.

Bölüm 8; projektif düzlemin analitik incelenmesine ayrılmıştır. Bu bağlamda, homojen koordinatlar yardımıyla projektif düzlemin modelleri, projektif doğruların denklemleri, lineer birleşim ve çapraz oran kavramları ve özellikleri tanıtılmakta, projektif dönüşümlerin

bu düzlemdeki denklemleri verilmektedir. İlave olarak, bu dönüşümler altında değişmez kalan nicelikler tartışılmakta, projektif düzlemin geometrisi ile afin ve metrik geometriler arasındaki ilişkiler açıklanmaktadır. Son olarak, noktaların homojen koordinatları, doğruların homojen koordinatlardaki denklemleri, projektif koniklerin denklemleri ve doğruların lineer birleşimi ele alınmaktadır.

Homojen koordinatlar yardımıyla Öklidyen uzayın afin dönüşümlerinin matris formları Bölüm 9 da verilmiştir. Bu bağlamda, öteleme ve dönme dönüşümleri, Euler açıları, keyfi bir eksen etrafında dönme, keyfi bir düzleme göre yansıma, ölçekleme ve kırpma dönüşümleri 4×4 matrisler yardımıyla verilmektedir.

Projektif uzayın, afin dönüşümleri kapsayan ve genel lineer dönüşümler olan projektif dönüşümleri Bölüm 10 da tanıtılmakta ve bu dönüşümlerin sınıflaması yapılmaktadır. Projektif dönüşümler tek, iki ve üç nokta projektif dönüşümleri olarak sınıflandırılırken; uzayın izdüşüm dönüşümleri perspektif ve paralel izdüşümleri olarak iki sınıfa ayrılır. Perspektif izdüşüm dönüşümleri de, projektif dönüşümlerdeki gibi; tek, iki ve üç nokta perspektif izdüşümleri olarak üç sınıfta incelenmiştir. Diğer taraftan, paralel izdüşümler de, eğik ve dik izdüşümler adı altında iki sınıfta incelenir.

Kitabın bölüm sonlarında verilen çözümlü problemler, okuyucuların, dönüşümleri daha iyi anlamaları ve bu dönüşümler arasındaki ilişkileri fark etmeleri için verilmiştir. Çok açık ve detaylı biçimde çözülmüş olan problemler, okuyucuları rehavete sevk etmemeli, aksine, alıştırma çözmek için onları motive etmelidir.

Dönüşümler ve geometriler birbirlerine bağlı olarak verildiğinden, öncelikle Öklidyen dönüşümlerin, bunların geometrik yorumlarının ve değişmezlerinin iyi bilinmesi gerekir. Bir sonraki dönüşüm sınıfı ile bir önceki dönüşüm sınıfı arasındaki ilişkiler veya farklılıklar da iyice anlaşılmalıdır. Bu şekilde okunduğunda, kitabın sadece matematikçiler için değil, aynı zamanda yüksek öğretimin bir çok alanında okuyan öğrencilere de faydalı olacağı inancındayız.

Kitabın, Matematik Bölümleri ile Matematik Eğitimi Anabilim Dalında okuyan öğrenciler için, Dönüşümler ve Geometriler I, II şeklinde iki dönemlik bir lisans dersi olarak okutulmasında yarar vardır.

Öklidyen düzlemin öteleme dönüşümünden projektif uzayın en genel dönüşümüne kadar temel lineer dönüşümleri kapsayan bu kitapta; Lineer Cebir ve Analitik Geometri çok sık kullanılmaktadır. Bu nedenle, Matematik harici bölümlerde okuyan öğrenciler, afin ve projektif dönüşümleri anlamada zorluk çekebilir. Bu öğrencilere, belirtilen derslerle ilgili temel kavramları öğrenmelerini tavsiye ederiz.

Son olarak;

- eserin fiziksel yapısının oluşturulmasında, dikkatli bir şekilde okuyarak bazı düzeltme ve düzenlemelerde çok faydalı katkılar yapan Dr. Hilal Gülkılık, Prof. Dr. Ahmet Arıkan ve Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu'na,
- yazarların bugünlere gelmelerinde emekleri geçen ve katkı sağlayan başta **eşleri ve**

ailelerine

- bu eserde yer alan grafiklerin çizimini yapan Yusuf Temuçin ARGÜN' e teşekkür ederiz.

Hasan Hüseyin UĞURLU & Ziya ARGÜN

İçindekiler

1	Giriş	1
1.1	Kısa Bir Tarihçe	1
1.2	Geometrik Dönüşüm	2
1.3	Bir Dönüşümün Tersi	5
1.4	Dönüşümlerin Bileşkesi	7
1.5	Dönüşüm Grupları	8
1.6	Geometrik Değişmezler	10
1.7	Düzlemde Dönme Dönüşümleri	12
1.8	Lineer Dönüşümler	13
1.9	Çözümlü Problemler	15
1.10	Problemler	19
2	Öklidyen Düzlemin İzometrilere	21
2.1	İzometrilere Bazı Özellikleri	22
2.2	İzometrilere ve Eşlik Bağlantısı	25
2.3	Düzlemde Öteleme Dönüşümleri	26
2.3.1	Öteleme Dönüşümlerinin Vektörel Formları	30
2.4	Düzlemde Dönme Dönüşümleri	31
2.4.1	Orijin Merkezli Dönme Dönüşümlerinin Denklemleri	33
2.4.2	Dönme Dönüşümlerinin Matris Formu	36
2.4.3	Genel Dönme Dönüşümünün Denklemleri	39
2.5	Düzlemin Katı Hareketlerinin Grubu	48
2.6	Çözümlü Problemler	53
2.7	Düzlemin Yansıma Dönüşümleri	68
2.8	Yansıma Dönüşümlerinin Cebirsel Denklemleri	71
2.8.1	Koordinat Eksenlerine Göre Yansıma Dönüşümleri	71
2.8.2	Orijinden Geçen Doğruya Göre Yansıma Dönüşümlerinin Denklemleri	72
2.8.3	Herhangi Bir Doğruya Göre Yansıma Dönüşümlerinin Denklemleri	74
2.9	Simetri	80
2.10	Diğer Karşıt Hareketler	82
2.11	Yansımaların Bileşkesi Olan Hareketler	87
2.12	Çözümlü Problemler	90

2.13 Problemler	106
3 Benzerlik Dönüşümleri	111
3.1 Benzerlik Dönüşümlerinin Genel Özellikleri	112
3.2 Özel Bir Benzerlik Dönüşümü	115
3.3 Benzerlik Dönüşümlerinin Genel Denklemleri	120
3.4 Şekillerin Benzerliği	123
3.5 Çözümlü Problemler	125
3.6 Problemler	135
4 Afın Dönüşümler	137
4.1 Afın Dönüşüm	137
4.2 Afın Grup	138
4.3 Temel Afın Dönüşümleri	142
4.4 Afın Özellikler	154
4.5 Afın Geometri	157
4.6 Çözümlü Problemler	168
4.7 Problemler	179
5 İzdüşümler	183
5.1 Paralel İzdüşümler	183
5.1.1 Bir Doğrunun Paralel İzdüşümleri	183
5.1.2 Bir Düzlemin Paralel İzdüşümleri	185
5.1.3 Paralel İzdüşümler ve Afın Dönüşümler	187
5.2 Perspektif İzdüşümler	189
5.2.1 Bir Doğrudan Onu Kesen Bir Doğruya Perspektif İzdüşümler	191
5.2.2 Bir Düzlemden Onu Kesen Bir Düzleme Perspektif İzdüşümü	195
5.3 Projektif Özellikler	197
5.3.1 Çapraz Oran	198
5.3.2 Harmonik Bölme	202
5.3.3 Noktadaş Doğruların Çapraz Oranı	203
5.3.4 Kesişen Doğruların Harmonik Bölmesi	207
5.3.5 Paralel Doğruların Çapraz Oranı	207
5.3.6 Çapraz Oran ve Konik Kesitleri	208
5.4 Çözümlü Problemler	209
5.5 Problemler	221
6 Projektif Dönüşümler	223
6.1 Bir Projektif Dönüşümün Tanımı	223
6.2 Projektif Dönüşüm Tanımının Bazı Sonuçları	225
6.3 Projektif Dönüşümlerin Denklemleri	227
6.4 Projektif Grup	233
6.5 Projektif Dönüşümler ve İzdüşümler	233

6.6	Konik Kesitleri	236
6.7	Projektif Denklik	236
6.8	Öklidyen Düzlemin Projektif Geometrisi	237
6.9	Çözümlü Problemler	241
6.10	Problemler	252
7	Projektif Düzlem	255
7.1	Kısa Bir Tarihçe	255
7.2	İdeal Noktalar	258
7.3	Genişletilmiş Düzlemler	259
7.4	Genişletilmiş Düzlem Modeli	260
7.5	İdeal Düzlem; Projektif Düzlemler	260
7.6	İzdüşümlere Daha Ayrıntılı Bir Bakış	263
7.7	Doğrudaşlık, Kesişim ve Duallık	265
7.8	Çapraz Oran ve İdeal Elemanlar	266
7.9	Projektif Doğru Üzerinde Sıra	272
7.10	Projektif Düzlemde Şekiller	275
7.11	Tam Şekillerin Harmonik Özellikleri	276
7.12	Harmonik Eşleniğin İnşası	279
7.13	Projektif Düzlemin Temel Teoremleri	280
7.14	Projektif Düzlemde Kendisine Tanımlı Dönüşümler	286
7.15	Homojen Koordinatlar	290
7.16	İzdüşüm Dönüşümlerinin Matris Formu	291
7.17	Çözümlü Problemler	295
7.18	Problemler	310
8	Analitik Projektif Geometri	313
8.1	Homojen Koordinatlar ve Projektif Düzlem	313
8.1.1	Projektif Doğru $\mathbb{P}^1$	313
8.1.2	Projektif Düzlem $\mathbb{P}^2$	314
8.2	Projektif Doğruların Denklemleri	318
8.3	Noktaların Lineer Birleşimi	329
8.4	Doğruların Lineer Birleşimi	331
8.5	Lineer Birleşim ve Çapraz Oran	332
8.6	Projektif Düzlemde Projektif Dönüşümlerin Denklemleri	333
8.7	Projektif Düzlemin Geometrilere	339
8.7.1	Projektif Düzlemde Afin Dönüşümler	339
8.7.2	Projektif Düzlemde Benzerlik Dönüşümleri	340
8.7.3	Projektif Düzlemde Hareket	343
8.8	Projektif Koniklerin Denklemleri	345
8.9	Çözümlü Problemler	350
8.10	Problemler	368

9	Homojen Koordinatlarda Uzayın Dönüşümleri	371
9.1	Öteleme Dönüşümü	372
9.2	Dönme Dönüşümleri	372
9.2.1	Euler Açıları	373
9.2.2	Bir Koordinat Eksenine Paralel Bir Eksen Etrafında Dönme	376
9.2.3	Keyfi Bir Eksen Etrafında Dönme	378
9.3	Yansıma Dönüşümleri	382
9.3.1	Koordinat Düzlemlerine Göre Yansıma Dönüşümleri	382
9.3.2	Keyfi Bir Düzleme Göre Yansıma Dönüşümleri	383
9.4	Ölçekleme Dönüşümleri	385
9.5	Kırpma Dönüşümleri	386
9.6	Çözümlü Problemler	387
9.7	Problemler	401
10	Projektif Uzay ve Dönüşümleri	405
10.1	Projektif Uzay	405
10.2	Uzayda Homojen Koordinatlar	407
10.3	Uzayda Doğrular ve Düzlemler	408
10.4	Projektif Uzayın Aksiyomatik Yapısı ve Dualite	410
10.5	Projektif Dönüşümler	416
10.5.1	Tek Nokta Projektif Dönüşümleri	420
10.5.2	İki Nokta Projektif Dönüşümleri	423
10.5.3	Üç Nokta Projektif Dönüşümleri	424
10.6	Perspektif İzdüşümleri	427
10.6.1	Tek Nokta Perspektif İzdüşümleri	432
10.6.2	İki Nokta Perspektif İzdüşümleri	434
10.6.3	Üç Nokta Perspektif İzdüşümleri	435
10.7	Paralel İzdüşümler	437
10.7.1	Eğik İzdüşümler	440
10.7.2	Dik İzdüşümler	443
10.8	Çözümlü Problemler	445
10.9	Problemler	477